

NÚMEROS ENTEROS

Existen distintas situaciones en las que necesitamos otros números distintos a los números naturales y nos vemos obligados a realizar una ampliación de estos, considerando los números naturales distintos del cero como números positivos y añadiéndole los correspondientes números negativos.

En un edificio usamos el número cero para indicar la planta baja y los números 1, 2, 3, ... para indicar las sucesivas plantas: primera, segunda, tercera, ... Todos ellos son números naturales. Para representar las plantas sótano necesitamos otros números, para ello consideramos los números naturales 1, 2, 3, como números positivos, es decir, +1, +2, +3, ... y para las plantas sótano usaremos números negativos: -1, -2, -3, ... para las distintas plantas sótano.

Una situación análoga nos la encontramos al medir la temperatura. Habitualmente usamos la escala centígrada o escala celsius. En esta escala la temperatura de 0°C la tenemos asignada al punto de congelación del agua y la de 100°C a su punto de ebullición. Para las temperaturas inferiores al punto de congelación del agua usamos números negativos hablando por ejemplo de -4°C.

Anders Celsius (1701-1744) fue un físico y astrónomo sueco, sus investigaciones en el campo de la astronomía fueron relevantes, sin embargo, es más conocido por ser el creador de la *escala Celsius*.

En el año 1742 inventó un termómetro de mercurio que calibró empleando la escala celsius (llamada centígrada hasta 1948), establecida por él. El punto correspondiente a la temperatura 0 °C coincidía con el punto de ebullición del agua, mientras que la temperatura de 100 °C equivalía a la de congelación del agua al nivel del mar. La escala indicaba, por lo tanto, temperaturas positivas cuando descendían las temperaturas; este sentido se cambió después. Ese mismo año presentó ante la Academia de ciencias sueca su memoria sobre los puntos fijos de la escala termométrica, que contribuyó decisivamente a la aceptación del termómetro centígrado.

https://es.wikipedia.org/wiki/Grado_Celsius

http://www.e-medida.es/documentos/Numero-2/sabias_que_C_significa_grado_y_no_grado_centigrado

En las cuentas corrientes se utilizan los números negativos llamados también números rojos para cuando el saldo de la cuenta es deudor. Si tenemos dinero en la cuenta, decimos que tenemos saldo positivo y estará representado por un número positivo (azul), pero si el banco ha tenido que abonar recibos por un importe superior a nuestro saldo, quedaremos con un saldo negativo (rojo) o deudor.

El conjunto de los números naturales es

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Desde un punto de vista aritmético, en la resta de números naturales teníamos la restricción de que el minuendo tenía que ser mayor o igual que el sustraendo.

$$\text{Minuendo} - \text{Sustraendo} = \text{Diferencia}$$

$$\text{Minuendo} \geq \text{Sustraendo}$$

Así, en los números naturales podíamos restar $7 - 5$, pero no $5 - 7$. El resultado de $7 - 5$ es un número natural, el 2, pero para $5 - 7$ necesitamos otro tipo de números, los números enteros negativos. Diremos que el resultado de $5 - 7$ es el número entero negativo -2 .

$$7 - 5 = 2 \quad \text{y} \quad 5 - 7 = -2$$

A los números naturales distintos de cero vamos a considerarlos como números positivos y ampliamos el conjunto de los números naturales con los correspondientes números negativos, constituyendo juntos el conjunto de números enteros.

El conjunto de los números naturales se representa por \mathbb{N} y el de los enteros por \mathbb{Z} .

1. SI EL MINUENDO ES MAYOR QUE EL SUSTRAENDO NOS DARÁ UN NÚMERO POSITIVO.

$$17 - 14 = 3$$

2. SI EL MINUENDO ES MENOR QUE EL SUSTRAENDO NOS DARÁ UN NÚMERO NEGATIVO.

$$5 - 12 = -7$$

Se trata de hacer la diferencia en orden contrario al dado y ponerle signo menos:

$$12 - 5 = 7 \quad \text{y} \quad 5 - 12 = -7$$

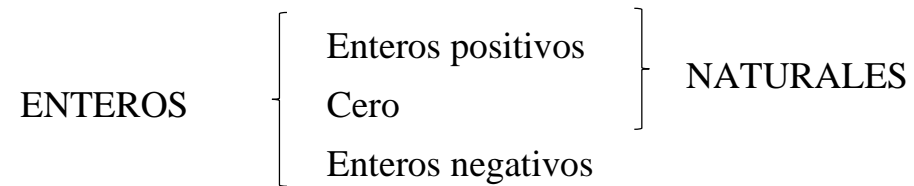
Observa:

$$7 - 5 = 2 \quad \text{y} \quad 5 - 7 = -2 \quad \quad \quad 9 - 4 = 5 \quad \text{y} \quad 4 - 9 = -5$$

o bien:

$$-5 + 7 = 2 \quad \text{y} \quad -7 + 5 = -2 \quad \quad \quad -4 + 9 = 5 \quad \text{y} \quad -9 + 4 = -5$$

El conjunto de los números enteros



El conjunto de los números enteros es

$$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3 \dots\}$$

El conjunto de los números enteros está formado por:

- Enteros positivos $\mathbb{Z}^+ = \{+1, +2, +3 \dots\}$
- Cero 0
- Enteros negativos $\mathbb{Z}^- = \{\dots -3, -2, -1\}$

Teniendo que

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Los números enteros positivos los escribimos, habitualmente, prescindiendo del signo + que les precede, coincidiendo así su escritura con la de los números naturales. Por ejemplo, $+5 = 5$. Podemos escribir:

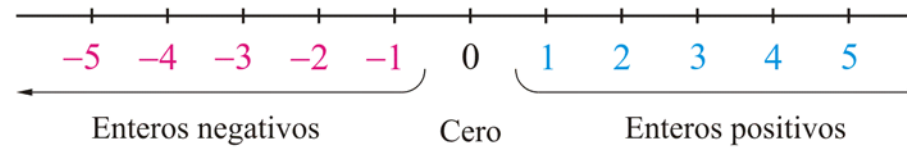
$$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$$

Ejemplos

- 1) Tengo cinco euros: 5 €
Debo cuatro euros: -4 €
- 2) El récord de inmersión con botellas, pero sin asistencia exterior, está en 332 m de profundidad: -332 m.
El viernes 24 de octubre de 2014 Eustace saltó desde un globo a 41419 metros de altura: +41419 m.

Representación de los números enteros

Los números enteros los representamos en una recta tomando un punto para el origen de la escala, el cero, y un segmento unidad.
Los números positivos los representamos a la derecha del cero y los negativos a su izquierda.



Opuesto de un número entero

El opuesto de un número entero es el número que se obtiene al cambiarle el signo a dicho número.

$$\text{Op}(a) = -a$$

$$\text{Op}(3) = -3$$

$$\text{Op}(-7) = 7$$

Observa que

Valor absoluto de un número entero

El valor absoluto de un número entero es el mismo número entero si este es positivo o cero y será su opuesto si el número es negativo

El valor absoluto de un número entero siempre es positivo o cero. Nunca es negativo

$$\text{Si } a \text{ es positivo, } |a| = a$$

$$\text{Si } a \text{ es cero, } |0| = 0$$

$$\text{Si } a \text{ es negativo, } |a| = -a$$

Ejemplos

$$|4| = 4$$

$$|0| = 0$$

$$|-6| = 6$$

El valor absoluto de un número entero es la distancia que hay de ese número a cero.

Un número entero y su opuesto están a la misma distancia de cero y, por lo tanto, tienen el mismo valor absoluto.

$$|3| = 3 \quad \text{y} \quad |-3| = 3$$

Relación de orden en los números enteros

Un número entero es menor que otro si está situado a la izquierda de este último en la recta numérica.

Un número entero negativo es menor que cualquier número entero positivo.

$$-5 < 3$$

Cualquier número negativo es menor que cero.

$$-4 < 0$$

El cero es menor que cualquier número positivo.

$$0 < 7$$

De dos números positivos es menor el que tiene menor valor absoluto.

$$6 < 9$$

De dos números negativos es menor el que tiene mayor valor absoluto.

$$-7 < -2$$

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

Suma de números enteros

Para sumar dos números enteros vamos a distinguir dos casos:

Si los dos números tienen el mismo signo, se suman los valores absolutos de ambos números y se pone el signo común.	Si los dos números tienen distinto signo, se restan sus valores absolutos y se pone el signo del que tenga mayor valor absoluto (mayor peso).
Ejemplos $(+4) + (+7) = +11$ $(-9) + (-6) = -15$	Ejemplos $(+4) + (-9) = -5$ $(-7) + (+11) = +4$
<ul style="list-style-type: none">• Si tengo 4 € y me dan 7 €, tengo 11 €• Si debo 9 € a un amigo de ayer y de hoy le debo 6 €, entonces le debo 15 €	<ul style="list-style-type: none">• Si tengo 4 € y debo 9 €, entonces debo 5 €• Si debo 7 € y tengo 11 €, entonces, pagando la deuda, tendré 4 €

También podemos realizar las sumas de números enteros suprimiendo previamente los paréntesis teniendo en cuenta:

- Si el paréntesis va precedido del signo + se deja el signo del interior del paréntesis.

$$+(+a) = +a \quad \text{y} \quad +(-a) = -a$$

- Si el paréntesis va precedido del signo - se cambia el signo del interior del paréntesis.

$$-(+a) = -a \quad \text{y} \quad -(-a) = +a$$

Así, los ejemplos anteriores los haríamos de la siguiente forma:

$(+4) + (+7) = 4 + 7 = 11$ $(-9) + (-6) = -9 - 6 = -15$	$(+4) + (-9) = 4 - 9 = -5$ $(-7) + (+11) = -7 + 11 = 4$
--	--

Resta de números enteros

Para restar dos números enteros se le suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejemplos

$$(+2) - (-4) = (+2) + (+4) = +6$$

$$(-2) - (-5) = (-2) + (+5) = +3$$

$$(-9) - (-4) = (-9) + (+4) = -5$$

$$(-3) - (-3) = (-3) + (+3) = 0$$

$$(-3) - (+3) = (-3) + (-3) = -6$$

Ejemplos

$$(+7) - (+5) = (+7) + (-5) = +2$$

$$(+4) - (+7) = (+4) + (-7) = -3$$

$$(-2) - (+6) = (-2) + (-6) = -8$$

$$(+3) - (+3) = (+3) + (-3) = 0$$

$$(+3) - (-3) = (+3) + (+3) = +6$$

También podemos realizar las restas de números enteros suprimiendo previamente los paréntesis:

- Si el paréntesis va precedido del signo + se mantiene el signo del número que haya dentro.

$$+(+a) = +a \quad \text{y} \quad +(-a) = -a$$

- Si el paréntesis va precedido del signo - se cambia el signo del número que haya dentro.

$$-(+a) = -a \quad \text{y} \quad -(-a) = +a$$

$$(+2) - (-4) = 2 + 4 = 6$$

$$(-2) - (-5) = -2 + 5 = 3$$

$$(-9) - (-4) = -9 + 4 = -5$$

$$(-3) - (-3) = -3 + 3 = 0$$

$$(-3) - (+3) = -3 - 3 = -6$$

$$(+7) - (+5) = 7 - 5 = 2$$

$$(+4) - (+7) = 4 - 7 = -3$$

$$(-2) - (+6) = -2 - 6 = -8$$

$$(+3) - (+3) = 3 - 3 = 0$$

$$(+3) - (-3) = 3 + 3 = 6$$

SUMAS Y RESTAS DE MÁS DE DOS NÚMEROS ENTEROS

Para sumar y restar más de dos números enteros podemos proceder de dos formas diferentes:

Ejemplo

$$-19 + 12 + 4 - 8 + 5 + 2$$

Método 1

Sumando y restando los números de izquierda a derecha sucesivamente.

$$-19 + 12 + 4 - 8 + 5 + 2 = -4$$

Mentalmente vamos realizando las operaciones de izquierda a derecha:

$$-19 + 12 = -7 \quad \Rightarrow \quad -7 + 4 = -3 \quad \Rightarrow \quad -3 - 8 = -11 \quad \Rightarrow \quad -11 + 5 = -6 \quad \Rightarrow \quad -6 + 2 = -4$$

Método 2

Sumando en primer lugar todos los positivos, a continuación todos los negativos, y realizando, finalmente, la resta resultante.

$$-19 + 12 + 4 - 8 + 5 + 2 = 12 + 4 + 5 + 2 - 19 - 8 = 23 - 27 = -4$$

Ejercicio1

Efectúa las siguientes operaciones de izquierda a derecha:

a) $-15 + 7 - 5 + 13 - 19 - 10$

b) $+5 - 12 + 15 - 5 + 6 - 16$

c) $-14 - 6 + 11 - 3 + 7 - 4$

Ejercicio2

Efectúa las siguientes operaciones agrupando previamente los números de igual signo:

a) $7 - 3 - 10 + 14 - 5 - 16$

b) $16 + 28 - 9 - 5 + 7 - 15$

c) $-3 + 16 - 25 - 7 + 18 - 9 - 13$

Ejemplo

$$(-9) + (+5) - (-4) + (-17) + (-9) - (+11)$$

Primero quitamos los paréntesis y a continuación vamos sumando y restando de izquierda a derecha o agrupando positivos y negativos previamente.

$$(-9) + (+5) - (-12) + (-17) + (-9) - (+11) = -9 + 5 + 12 - 17 - 9 - 11 = -29$$

Ejercicio 3

a) $(-5) + (-8) - (-3) + (+9) - (+11) - (-7)$

b) $-(-3) + (+14) - (-12) + (-9) + (-5) - (+8)$

c) $-(+11) - (-3) + (-1) - (-15) + (+12) - (+4)$

d) $(+7) - (+6) - (-18) + (-11) + (+9) - (-5)$

Ejemplo

$$8 - (17 - 6) + (29 - 33)$$

Método 1

Calculando en primer lugar el valor de las operaciones de los paréntesis:

Realizamos las operaciones de los paréntesis, quitamos los paréntesis y calculamos de izquierda a derecha:

$$8 - (17 - 6) + (29 - 33) = 8 - (+11) + (-4) = 8 - 11 - 4 = -7$$

Método 2

Quitando en primer lugar los paréntesis y operando de izquierda a derecha:

$$8 - (17 - 6) + (29 - 33) = 8 - 17 + 6 + 29 - 33 = -7$$

Ejercicio 4

Realiza las siguientes operaciones calculando en primer lugar el valor de las operaciones de los paréntesis:

a) $-14 + (17 - 9 - 6) - (11 - 18)$

b) $(9 - 6 - 8) - (13 + 4) + (19 + 3)$

c) $-(-4 - 17 - 8) - (-4 + 15) - (6 - 7)$

d) $(7 - 13) + (9 - 17) - (19 - 12)$

e) $(14 + 14 - 17) + 5 - (6 + 9 - 22)$

Ejercicio 5

Realiza las siguientes operaciones suprimiendo en primer lugar los paréntesis:

a) $(14 - 26) + (19 - 8) - (9 - 14)$

b) $(6 + 6 - 15) - 2 - (9 + 9 - 21)$

c) $-3 + (1 - 8 - 5) - (12 - 17)$

d) $-(-9 - 12 - 3) - (-5 + 13) - (9 - 7)$

e) $(19 - 2 - 6) - (3 + 14) + (9 + 6)$

EJERCICIOS

1. Efectúa:

- | | | | | | |
|----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| 1) $7+8$ | 3) $5-7$ | 5) $-7-3$ | 7) $-1-1$ | 9) $12-19$ | 11) $-9+9$ |
| 2) $9-6$ | 4) $-2+5$ | 6) $-8+6$ | 8) $18-11$ | 10) $5-17$ | 12) $-4+3$ |

2. Calcula:

- | | | | | |
|------------|-------------|-------------|----------------|-------------------|
| 1) $5+4+7$ | 4) $3-9+2$ | 7) $-2-6-9$ | 10) $4+2-11$ | 13) $6-20-4-3$ |
| 2) $9-5+6$ | 5) $4-6-5$ | 8) $-3+5+7$ | 11) $7-5-15+7$ | 14) $-14+21-6-15$ |
| 3) $5-8+7$ | 6) $-4-5+2$ | 9) $8+7-6$ | 12) $4-7+6+5$ | 15) $-12-7-8-10$ |

3. Realiza eliminando previamente los paréntesis:

- | | | | | |
|------------------|------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1) $(+4)+(+3)$ | 7) $(-2)+(+4)$ | 13) $(-9)+(-7)$ | 19) $(+28)+(-23)$ | 25) $(-15)+(+5)$ |
| 2) $(+9)+(-7)$ | 8) $(+6)+(-6)$ | 14) $(-4)+0$ | 20) $(-6)+(-8)$ | 26) $(-7)+(+18)$ |
| 3) $(-8)+(+6)$ | 9) $0+(+1)$ | 15) $(+8)+(+9)$ | 21) $(-17)+(+9)$ | 27) $(-14)+(-21)$ |
| 4) $(+4)+(-9)$ | 10) $(+1)+(-5)$ | 16) $(-15)+(+11)$ | 22) $(-16)+(-12)$ | 28) $(+16)+(-17)$ |
| 5) $(+9)+(-13)$ | 11) $(+3)+(+6)$ | 17) $(-10)+(-4)$ | 23) $(+3)+(-11)$ | 29) $(-13)+(+3)$ |
| 6) $(-3)+(-5)$ | 12) $(+2)+(-9)$ | 18) $(-15)+(+17)$ | 24) $0+(-15)$ | 30) $(+13)+(-3)$ |

4. Realiza las siguientes restas eliminando previamente el paréntesis:

- | | | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| 1) $(+8)-(+5)$ | 4) $(+1)-(+7)$ | 7) $(-8)-(-5)$ | 10) $(-4)-(+4)$ | 13) $(-9)-(-7)$ |
| 2) $(+3)-(+9)$ | 5) $(+5)-(-3)$ | 8) $(-2)-(-9)$ | 11) $0-(+3)$ | 14) $(+7)-(-3)$ |
| 3) $(+6)-(+2)$ | 6) $(-9)-(+7)$ | 9) $(-3)-(+11)$ | 12) $(-8)-(+7)$ | 15) $(-8)-(-8)$ |

5. Calcula:

1) $(+4) + (+9) + (+3)$

2) $(-6) + (-3) + (-8)$

3) $(+11) + (-15) + (+6)$

4) $(+3) + (-11) + (+2)$

5) $(+4) + (-7) + (-2)$

6) $(-6) + (+3) + (+7)$

7) $(-2) + (-4) + (+6)$

8) $(-14) + (+8) + (-11)$

9) $(+23) + (-14) + (+6)$

6. Realiza las siguientes operaciones:

1) $(+4) - (+3) - (-5)$

2) $(+7) - (+8) + (-14)$

3) $(-6) + (+4) - (-5)$

4) $(+2) - (-4) - (-6)$

5) $(-7) - (+3) - (+8)$

6) $(+4) - (-10) - (+7) + (-13)$

7) $(-3) - (+5) + (-16) - (+5)$

8) $(-15) - (+6) + (+4) + (-2)$

9) $(+7) - (-12) + (+1) - (+9)$

10) $(+2) + (-8) - (+3) + (-2)$

11) $-(-7) + (-5) - (-12) + (+19) - (+8)$

12) $(-11) - (-3) - (+15) + (-16) - (+7)$

13) $(+4) - (-19) + (+1) - (+2) - (-6)$

14) $-(-15) + (+8) - (-6) + (-17) - (+3)$

15) $(+14) - (+21) - (+5) + (-4) - (-1)$